

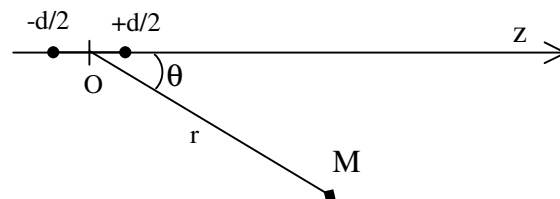
Facoltà di Ingegneria
Esame scritto di Fisica II – V.O. e N.O.
17-9-2002 - Compito B

Esercizio n.1

Due cariche elettriche $+q$ e $-q$ vengono collocate rispettivamente nelle posizioni $z = +\frac{d}{2}$ e $z = -\frac{d}{2}$ (vedi figura) in un campo elettrico uniforme che, in assenza delle due cariche, ha espressione $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}_z$ (essendo \hat{u}_z il versore dell'asse z). In assenza delle cariche $+q$ e $-q$, il potenziale elettrico del punto O, origine dell'asse z , vale V_0 .

Dopo che le cariche $+q$ e $-q$ sono state collocate nelle posizioni suddette, calcolare:

- l'espressione del potenziale elettrico $V(M)$ in un punto generico $M \equiv (r, \theta, \phi)$ dello spazio, a distanza $r \gg d$ dal punto O
- l'espressione del campo elettrico $\vec{E}(M)$ nello stesso punto M



Suggerimento: si ricordi l'espressione del gradiente in coordinate polari: $\vec{\nabla} = \hat{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$

Si risponda quindi alle seguenti domande:

1. Il potenziale elettrico in M è
 - A. uguale al potenziale elettrico associato al campo elettrico $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}_z$
 - B. la somma del potenziale elettrico dovuto alla carica $+q$ e del potenziale elettrico dovuto alla carica $-q$
 - C. la somma del potenziale elettrico del dipolo di momento $\vec{p} = q \frac{d}{2} \hat{u}_z$ e del potenziale associato al campo $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}_z$
 - D. la somma del potenziale elettrico del dipolo di momento $\vec{p} = qd \hat{u}_z$ e del potenziale associato al campo $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}_z$ (*)
2. Tenendo conto che $r \gg d$, il potenziale elettrico in M dovuto soltanto alle cariche $+q$ e $-q$ vale
 - A. 0
 - B. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$
 - C. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2}$ (*)
 - D. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \sin \theta}{r}$
3. Il potenziale elettrico in M dovuto soltanto al campo $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}_z$ vale
 - A. $V_0 - E_0 r \cos \theta$ (*)
 - B. $E_0 r \sin \theta - V_0$
 - C. 0
 - D. $E_0 r \cos \theta$
4. Il potenziale elettrico dovuto alle due cariche $\pm q$ ed al campo \vec{E}_0 in M vale
 - A. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \sin \theta}{r} + E_0 r \sin \theta - V_0$
 - B. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} + V_0 - E_0 r \cos \theta$ (*)
 - C. $E_0 r \cos \theta$
 - D. 0
5. La componente radiale del campo elettrico, \vec{E}_r , vale

- A. $\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^3} + E_0 r \cos \theta$
 B. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \sin \theta}{r^2} + E_0 \sin \theta$
 C. $E_0 \cos \theta$
 D. 0
6. La componente zenitale del campo elettrico, \vec{E}_θ , vale
 A. 0
 B. $-E_0 \cos \theta$
 C. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \sin \theta}{r^3} - E_0 \sin \theta$ (*)
 D. $\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{r^3} + E_0 \sin \theta$
7. La componente azimutale del campo elettrico, \vec{E}_ϕ , vale
 A. 0 (*)
 B. $-\frac{E_0}{\sin \theta}$
 C. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^3} - E_0 r \sin \theta$
 D. $\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{r^3} + E_0 \tan \theta$

Esercizio n.2

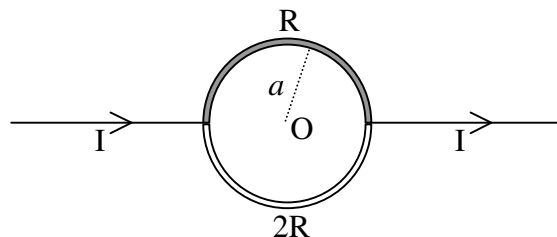
Due fili sono piegati a semicerchio di raggio a e collegati come mostrato in figura. La parte superiore ha resistenza R , quella inferiore ha resistenza $2R$. Al cerchio così ottenuto, vengono connessi due fili rettilinei molto lunghi (vedi figura), nei quali scorre una corrente I .

Trovare il campo magnetico (modulo, direzione e verso) nel punto O centro del cerchio.

Valori numerici: $R=10\Omega$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A}$, $I=1 A$, $a=50 \text{ cm}$.

Si risponda quindi alle seguenti domande:

8. Le due parti (inferiore e superiore) del cerchio sono
 A. in serie
 B. in parallelo (*)
 C. né in serie né in parallelo
 D. sia in serie che in parallelo
9. La corrente che passa nella parte superiore del cerchio vale:
 A. $\frac{I}{2} A$
 B. $\frac{I}{4}$
 C. $\frac{I}{3}$
 D. $\frac{2I}{3}$ (*)
10. La corrente che passa nella parte inferiore del cerchio vale:
 A. 0.5 A
 B. 0.667 A
 C. 0.333 A (*)
 D. 0.75 A
11. Il campo magnetico nel centro di un semicerchio di raggio a , percorso da una corrente di intensità i , ha modulo
 A. $\frac{\mu_0 i}{4\pi a^2}$
 B. $\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{1}{a^2}$



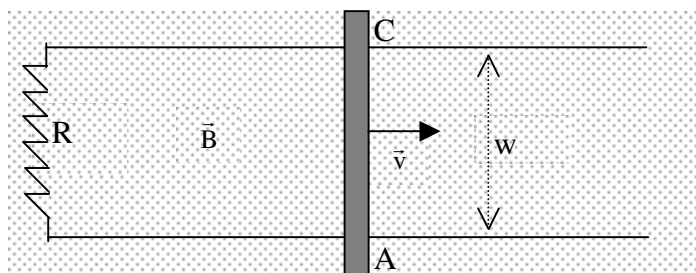
- C. $\frac{\mu_o i}{a}$
- D. $\frac{\mu_o i}{4a} (*)$
12. Il campo magnetico nel centro O del cerchio ha modulo
- A. $3.14 \mu\text{T}$
- B. $0.2094 \mu\text{T} (*)$
- C. $87.01 \mu\text{T}$
- D. $54.36 \mu\text{T}$
13. Il campo magnetico nel centro O del cerchio è
- A. parallelo al foglio e rivolto verso destra
- B. parallelo al foglio e rivolto verso sinistra
- C. perpendicolare al foglio ed uscente
- D. perpendicolare al foglio ed entrante (*)

Esercizio n.3

Nel circuito mostrato in figura, la sbarretta AC, di resistenza trascurabile, scivola parallelamente a se stessa con velocità costante \vec{v} , diretta verso destra. Il circuito è immerso in un campo magnetico \vec{B} uniforme, ortogonale al piano del foglio ed uscente.

Trascurando l'attrito e l'autoinduzione, determinare

- il valore di $v = |\vec{v}|$ affinché nel circuito circoli una corrente di intensità assegnata I
- il verso di I
- la potenza che occorre fornire alla sbarretta per tenerla in moto con velocità costante di modulo v
- la forza magnetica (modulo, direzione e verso) agente sulla sbarretta quando questa si muove con velocità \vec{v}
- la forza totale agente sulla sbarretta quando questa si muove con velocità \vec{v}



Valori numerici: $B=1\text{T}$, $R=2\Omega$, $w=50\text{ cm}$, $I=0.5\text{ A}$.

Si risponda quindi alle seguenti domande:

14. Quando la sbarretta AC si muove con velocità costante \vec{v} , la forza elettromotrice indotta nel circuito ha valore assoluto
- A. $Bvw (*)$
- B. $\frac{1}{2}Bvw$
- C. $\frac{1}{2}B^2vw$
- D. Bw^2
15. Affinché la corrente indotta abbia valore $I=0.5\text{ A}$, la velocità della sbarretta deve avere modulo
- A. $1\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- B. $2\frac{\text{m}}{\text{s}} (*)$
- C. $3\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- D. $4\frac{\text{m}}{\text{s}}$
16. Quando la sbarretta AC si muove con velocità costante \vec{v} , la corrente indotta I circola in verso
- A. orario (*)
- B. antiorario
- C. né in verso orario né in verso antiorario perché è nulla
- D. sia in verso orario che in verso antiorario perché è alternata

17. La potenza che bisogna fornire alla sbarretta AC per mantenerla in moto con velocità costante \vec{v} vale:
- 0 W
 - 0.5 W (*)
 - 1 W
 - 1.5 W
18. La forza magnetica agente sulla sbarretta che si muove con velocità costante \vec{v} ha modulo
- 0 N
 - 0.25 N (*)
 - 0.75 N
 - 1.25 N
19. La forza magnetica agente sulla sbarretta che si muove con velocità costante \vec{v} è
- ortogonale al foglio ed uscente
 - ortogonale al foglio ed entrante
 - parallela al foglio ed orientata verso destra
 - parallela al foglio ed orientata verso sinistra (*)
20. La forza totale agente sulla sbarretta che si muove con velocità costante \vec{v} ha modulo
- 0 N (*)
 - 0.25 N
 - 0.75 N
 - 1.25 N

Altre domande

21. Un dipolo elettrico con asse ortogonale alle linee di forza del campo elettrostatico è in equilibrio (stabile o instabile)
- Vero
 - Falso (*)
22. La differenza di potenziale alle estremità di una batteria può essere maggiore della forza elettromotrice della batteria
- Vero
 - Falso (*)
23. Quando una carica si muove da un punto all'altro di una superficie equipotenziale, il lavoro compiuto sulla carica dal campo elettrico è positivo.
- Vero
 - Falso (*)
24. Se la carica contenuta all'interno di un certo volume V cambia nel tempo, vi è un flusso di carica attraverso la superficie che racchiude il volume V
- Vero (*)
 - Falso
25. Il modulo del campo elettrico all'interno di un condensatore piano ideale è la metà del modulo del campo elettrico dovuto ad una delle due piastre.
- Vero
 - Falso (*)
26. Un campo solenoidale è un campo la cui divergenza è nulla in ogni punto dello spazio
- Vero (*)
 - Falso
27. Una particella carica con massa m e carica q che si muove con velocità \vec{v} perpendicolare al campo magnetico \vec{B} percorre un cerchio di raggio $r = \frac{qB}{mv}$
- Vero
 - Falso (*)
28. Il campo magnetico all'interno di un solenoide toroidale percorso da corrente aumenta linearmente con la distanza dall'asse del toroide
- Vero
 - Falso (*)
29. Una spira circolare di raggio r è costituita da un pezzo di filo isolato percorso da una corrente I. Il campo magnetico al centro della spira ha modulo B. Lo stesso filo, sempre percorso dalla corrente I, viene avvolto in modo da formare due spire adiacenti di raggio r/2. Il modulo del campo magnetico al centro delle due spire vale 2B.
- Vero
 - Falso (*)

30. Una spira rettangolare percorsa da corrente in un campo magnetico uniforme \vec{B} si orienta in modo che il piano da essa definito sia ortogonale alle linee di forza del campo

- A. Vero (*)
B. Falso

Soluzione:

Esercizio n.1

Il potenziale elettrico nel punto generico M è la sovrapposizione (cioè la somma) del potenziale elettrico delle due cariche e del potenziale elettrico associato al campo. Le due cariche costituiscono un dipolo elettrico di momento di dipolo $\vec{p} = qd\hat{z}$ collineare ed equiverso ad \vec{E}_0 . Il potenziale di questo dipolo ha espressione:

$$V_d(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

dove r_+ ed r_- sono le distanze da M delle cariche $+q$ e $-q$ per le quali nell'approssimazione di dipolo valgono le relazioni $r_- - r_+ \approx d \cos \theta$ e $r_- r_+ \approx r^2$.

La differenza di potenziale associata al campo \vec{E}_0 , tra il punto O ed il punto M, è

$$V(O) - V(M) = \int_O^M \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} = \int_0^{r \cos \theta} E_0 dz = E_0 r \cos \theta$$

da cui si ottiene

$$V(M) = V(O) - E_0 r \cos \theta = V_0 - E_0 r \cos \theta$$

Il potenziale risultante nel punto M vale di conseguenza:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} + V(O) - E_0 r \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} + V_0 - E_0 r \cos \theta$$

Il campo elettrico è l'opposto del gradiente del potenziale: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. Usando le coordinate polari si ha:

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial}{\partial r} V(M) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^3} + E_0 \cos \theta \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \sin \theta}{r^3} - E_0 \sin \theta \\ E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} V(M) = 0 \end{cases}$$

Esercizio n.2

Usando la prima formula di Laplace $\left(d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^3} \right)$, si vede subito che al campo magnetico in O contribuiscono solo le correnti nei fili a forma di semicerchio. Sempre dalla formula di Laplace si può dimostrare che il campo magnetico generato da una corrente in un arco di apertura θ e raggio r , nel centro dell'arco, ha modulo $B_\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \theta$.

Detto \hat{z} un versore perpendicolare al piano del foglio e con verso uscente, il campo in O dovuto alla corrente I_s nel semicerchio superiore risulta $\vec{B}_s = -\frac{\mu_0 I_s}{4a} \hat{z}$, mentre il campo in O generato dalla corrente I_l nel semicerchio inferiore

vale $\vec{B}_l = \frac{\mu_0 I_l}{4a} \hat{z}$: il campo risultante nel centro del cerchio vale quindi $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4a} (I_l - I_s) \hat{z}$

Le correnti I_s ed I_l possono essere ottenute osservando che i due semicerchi sono in parallelo.

La ddp tra le estremità di ciascuno di essi vale:

$$V = R_T I = \frac{2}{3} RI$$

essendo

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \Rightarrow R_T = \frac{2}{3} R$$

Di conseguenza $I_l = \frac{V}{2R} = \frac{1}{3} I = 0.333 A$ ed $I_s = \frac{V}{R} = \frac{2}{3} I = 0.667 A$

Sostituendo questi valori nell'espressione del campo magnetico si ha

$$\vec{B} = (-0.2094 \hat{z}) \mu\text{T}$$

Il campo magnetico è dunque ortogonale al piano del foglio ed uscente.

Esercizio n.3

Quando la sbarra si muove con velocità costante \vec{v} , la variazione di flusso magnetico nel tempo dt

è $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B w v dt$, avendo orientato il contorno (cioè il circuito) in verso antiorario.

La f.e.m. indotta, per la legge di induzione di Faraday, è

$$\text{f.e.m.} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B w v$$

e quindi la corrente indotta ha intensità $I = \frac{B w v}{R}$.

Il verso della corrente indotta è opposto a quello del contorno cioè è orario. Dall'espressione di I si ottiene

$$v = \frac{IR}{Bw} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La potenza che occorre fornire alla sbarra per tenerla in moto con velocità v è uguale alla potenza dissipata nella resistenza $P = RI^2 = 2\Omega \cdot (0.5\text{A})^2 = 0.5\text{W}$.

La forza magnetica sulla sbarretta è $\vec{F}_M = I \vec{AC} \wedge \vec{B}$: è perpendicolare a \vec{AC} ed a \vec{B} , cioè è parallela al piano del circuito, è orientata verso la resistenza R ed ha modulo $F_M = 0.5\text{A} \cdot 0.5\text{m} \cdot 1\text{T} = 0.25\text{N}$

Poiché la sbarra AC si muove con velocità costante, la forza totale su di essa, somma della forza magnetica e della forza esterna, è nulla.